

Contrôle continu 1

Exercice 1 $E = \{ (4a, b, 2b, 2a) ; a, b \in \mathbb{R} \}$

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{matrix} x = z \\ y = t \end{matrix} \}.$$

1) Pour que E soit un sous-e.v.:

1pt

• $(0, 0, 0, 0) \in E$, alors $E \neq \emptyset$ ✓

• Pour $v = (4a, b, 2b, 2a) \in E$
 $w = (4a', b', 2b', 2a') \in E$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

on a que:

$$v + \lambda w = (4(a + \lambda a'), b + \lambda b', 2(b + \lambda b'), 2(a + \lambda a')) \in E$$

Alors E est un sous-e.v.

Pour que F soit un sous-e.v.:

• $(0, 0, 0, 0) \in F$ bien sûr.

• Si $(x, y, x, y) \in F$ et $(x', y', x', y') \in F$,
alors

$$(x, y, x, y) + \lambda(x', y', x', y') \\ = (x + \lambda x', y + \lambda y', x + \lambda x', y + \lambda y') \\ \in F \text{ aussi.}$$

$\Rightarrow F$ est un sous-e.v.

2) . $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ par définition
 1pt et $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base
 et donc $\dim(E) = 2$.

$$\bullet F = \{ (x, y, x, y) \in \mathbb{R}^4; x, y \in \mathbb{R}^2 \} \\ = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base
 et $\dim(F) = 2$.

3) $E \cap F$ est l'espace des $(4a, b, 2b, 2a) \in \mathbb{R}^4$
avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que:

1 pt

$$4a = 2b$$
$$\text{et } b = 2a.$$

$$\Rightarrow E \cap F = \left\{ (4a, 2a, 4a, 2a) ; a \in \mathbb{R} \right\}$$

En particulier, $E \cap F \neq \{0\}$, alors

$$\mathbb{R}^4 \neq E \oplus F.$$

4) Il faut trouver un sous-espace

2 pt

$$G \subset \mathbb{R}^4 \text{ t.q. :}$$

- $G \cap F = \{0\}$
- $\dim G + \dim F = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, c.-à-d. :
 $\dim G = 4 - 2 = 2$.

Par exemple:

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ (x, y, 0, 0) ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

- est de dimension 2 (car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
ne sont pas colinéaires)

• satisfait $G \cap F = \{0\}$:

si $(x, y, x, y) \in G$, forcément $x=y=0$.

Alors G est un supplémentaire de F .



Exercice 2

$$G = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(0) = P(-1) = 0\}$$

$$H = \mathbb{R}_1[x] = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

1) Pour que G soit un sous-ev :

(1pt)

• $0 \in G$: $0(0) = 0(-1) = 0$.

• Pour $P, Q \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda \cdot Q(0) = 0 + \lambda \cdot 0 \\ = 0$$

$$\text{et } (P + \lambda Q)(-1) = P(-1) + \lambda \cdot Q(-1) = 0 + \lambda \cdot 0$$

$$= 0.$$

Alors $P + \lambda Q \in G$.

Pour que M soit un sous- $\mathcal{E}V$:

- $0 = 0 \cdot x + 0 \in M$.

- Pour $P = ax + b$, $Q = a'x + b' \in M$
et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P + \lambda Q &= ax + b + \lambda(a'x + b') \\ &= (a + \lambda a')x + (b + \lambda b') \in M. \end{aligned}$$

2) $G \cap M$ est l'espace des polynômes
 $P(x) = ax + b$ tels que:

1pt

$$\begin{cases} P(0) = b = 0 \\ P(-1) = -a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$$

Alors $G \cap M = \{0\}$.

3) Trouver les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que:

(2pt)

$Q(x) - (ax + b) \in G$, ou autrement dit:

$$\begin{cases} Q(0) - b = 0 \\ Q(-1) - (-a + b) = 0 \end{cases}$$

Alors il y a une seule solution:

$$b = Q(0)$$

$$a = b - Q(-1) = Q(0) - Q(-1).$$

4)

Attention, $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie, alors il faut vérifier:

(1pt)

a) $G \cap H = \{0\}$ par (2).

b) $G + H = \mathbb{R}[x]$ parce que (par (3)):

tout $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ s'écrit comme

$$Q(x) = \underbrace{P(x)}_{\in G} + \underbrace{\left((Q(0) - Q(-1))x + Q(0) \right)}_{\in H}.$$

Exercice 3

1) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors:

1.5 pt

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$$

$$= T\begin{pmatrix} a + \lambda a' & b + \lambda b' \\ c + \lambda c' & d + \lambda d' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + \lambda a' & c + \lambda c' \\ b + \lambda b' & d + \lambda d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$$

$$= T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda T\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

T est donc une application linéaire.

C'est un isomorphisme parce que

$T \circ T = \text{id}$, alors T est sa propre

réciproque:

$$T(T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2) La base canonique de $M_2(\mathbb{R})$:

2pt $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule:

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$$

$$T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

$$T(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

$$T(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

Alors la matrice de T dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

1.5pt $= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$

La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ étant libre, c'est une base de S (et $\dim(S) = 3$).

• Note: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=d=0$
et $b=-c$.

Alors $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Une base de A est alors $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

• $S \oplus A = M_2(\mathbb{R})$ parce que :

$$a) S \cap A = \{0\}$$

(si $M = T(M)$ et $M = -T(M)$, alors $M = -M$ et donc $M = 0$).

$$b) \dim S + \dim A = 3 + 1 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R}).$$

Alternative:

b') $S + A = M_2(\mathbb{R})$ parce que tout $M \in M_2(\mathbb{R})$ s'écrit comme :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + T(M))}_{\in S} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - T(M))}_{\in A}.$$

4) Les bases de \mathcal{B} et \mathcal{A} donnent la base

(1pt) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

On calcule:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice de T dans cette base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ z+t \\ x+y-z-t \end{pmatrix}$$

$$1) \quad (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f) \quad \text{ssi:}$$

207

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{cases}$$

Autrement dit : $y = -x$ et $t = -z$, alors :

$$\text{Ker}(f) = \{ (x, -x, z, -z) ; x, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas

colinéaires, alors ils forment une base et

$$\dim \text{Ker}(f) = 2.$$

Le théorème du rang donne :

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_4 = \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_2 + \dim \text{Im}(f)$$

$$\text{alors } \dim \text{Im}(f) = 2.$$

2) Prenons (par exemple):

2pt

$$f(1,0,0,0) = (1, 0, 1) \in \text{Im}(f)$$

$$f(0,0,1,0) = (0, 1, -1) \in \text{Im}(f)$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre et donc, parce que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ par 1), une base de l'image.